Многопрофильная олимпиады Курского государственного университета «Твой выбор» по математике

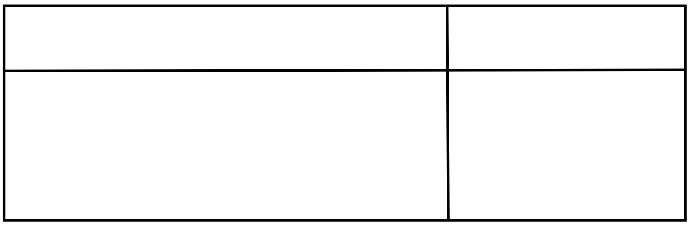
Заочный тур

7 класс

1. В ясельной группе детского сада больше 8, но меньше 18 детей. На Новый год к ним пришёл Дед Мороз с мешком, в котором было 140 конфет. Раздав всем ребятам поровну конфет, Дед Мороз обнаружил, что в мешке осталось 4 конфеты. Сколько конфет получил каждый ребёнок? (10 баллов)

2. На рисунке можно найти 9 прямоугольников. Известно, что их площадь составляет 820 см^2. Найдите площадь самого большого из этих прямоугольников. (25 баллов)

3. Есть 5 белых, 6 синих и 8 зеленых шаров, все шары пронумерованы



различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми. (15 баллов)

4. В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей? (20 баллов)

5. У Пети есть четыре орешка. Он всеми возможными способами брал по три орешка и взвешивал их на весах. Получилось 9 г, 14 г. 16 г и 18 г. Сколько весил каждый орешек? Требуется найти все решения задачи и доказать, что других нет. (15 баллов)

6. Квадрат состоит из одного внутреннего квадрата (чёрного) и четырех равных белых прямоугольников (см. рис. 1). Периметр каждого прямоугольника равен 40 см. Найдите площадь чёрного квадрата. (15 баллов)

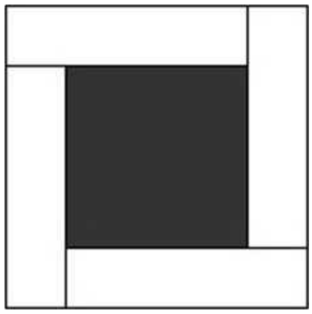


Рис. 1

Многопрофильная олимпиады Курского государственного университета «Твой выбор» по математике

Заочный тур

8 класс

1. Решить уравнение (10 баллов)

$$2x^4 + 8x^3 - 23x^2 - 62x + 15 = 0$$

2. В трапеции ABCD (AD || BC, AD > BC) точка M – середина стороны AB. Диагональ AC пересекает отрезок MD в точке K такой, что DM=7KM. Найти отношение длин оснований. При дополнительном условии, что BC=4, найти длину отрезка с концами на боковых сторонах, проходящего через точку пересечения диагоналей параллельно основанию. (25 баллов)

3. Доказать, что $3^{121} - 3$ делится на 726. (15 баллов)

4. Определить через сколько минут после того, как часы показывали 9 часов, минутная стрелка догонит часовую? (10 баллов)

5. Из точки внутри равностороннего треугольника опускаются перпендикуляры на стороны. Докажите, что сумма их длин не зависит от выбора точки. (25 баллов)

6. Докажите, что если $a > 0, b > 0, a + b = 1$, то $\frac{(1+a)(1+b)}{1+ab} \geq \frac{9}{5}$ (15 баллов)

Многопрофильная олимпиады Курского государственного университета «Твой выбор» по математике

Заочный тур

9 класс

1. Докажите, что при любых a и b будет верно неравенство $a^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3+b^4 \geq 0$ (15 баллов)
2. В момент, когда два бассейна были пустыми, семь труб одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на ¼ своего объёма, три трубы переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на ½ своего объёма, ещё две трубы переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найдите отношение объёмов бассейнов. (15 баллов)
3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высота CE и медиана AD пересекаются в точке P. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что CP=5, а PE=2. (20 баллов)
4. В сосуд налили 12 литров щелочи и 8 литров воды. Часть этой смеси отлили, а в сосуд долили 10 литров воды. Затем снова отлили из сосуда столько же жидкости, сколько в первый раз. После этого оказалось, что оставшийся в сосуде раствор содержит 5 литров щелочи. Сколько литров смеси отлили из сосуда в первый раз? (10 баллов)
5. Сколько существует квадратных трехчленов $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q, $|q| \leq 55$, имеющих корень, равный 7? (15 баллов)
6. Две окружности радиуса R касаются друг друга в точке K . Точка A лежит на одной окружности, точка B – на другой, угол AKB –прямой. Докажите, что сумма отрезка AB равна 2R. (25 баллов)

Многопрофильная олимпиады Курского государственного университета «Твой выбор» по математике

Заочный тур

10 класс

1. Докажите, что $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ - $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ целое число. Найдите его. (10 баллов)
2. Даны две пересекающиеся сферы радиуса R, расстояние между их центрами равно d. Найти радиус полученной в пересечении окружности. (20 баллов)
3. При каких значениях a неравенства $ax^2 - 2(a+3)x + a < 0$ верно при всех x, удовлетворяющих условию $x \in [-2, 1]$? (20 баллов)
4. На координатной плоскости рассматриваются всевозможные параболы $y=x^2 + ax$. Докажите, что вершины этих парабол сами лежат на некоторой параболе. На какой? (15 баллов)
5. Обозначим через $[\,n\,]$ наибольшее целое число, не превосходящее n. Существует ли такое натуральное число n, для которого $[n\sqrt{n}]$ равен 100? (20 баллов)
6. Дан прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2. Точка P, лежащая на гипотенузе, равноудалена от середин катетов. Найдите расстояние от точки P до вершины прямого угла треугольника. (15 баллов)

Многопрофильная олимпиады Курского государственного университета «Твой выбор» по математике

Заочный тур

11 класс

1. Найти остатки от деления на 5, 7, 11 и 13 числа:
$$2^{2025} + 3^{2025};$$ (20 баллов)

2. Решить неравенство (15 баллов)
$$log_{tgx} tg^2x \geq log_{tgx-1}(tg^2x - 2tgx + x^2 - 90x + 2026).$$

3. В угол величиной 2α Вписаны две, касающиеся внешним образом окружности. Найти отношение радиуса большей к радиусу меньшей окружности. (20 баллов)
4. Найдите больший корень уравнения $(x-1)\sqrt{3-x} = 0.$ (10 баллов)
5. Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно 8. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A и B, центр грани $AA'B'B$ и середину ребра $C'D'$. (20 баллов)
6. Докажите, что наибольшее значение функции $f(x) = \sin^{10}x \cdot \cos^{12}x$ меньше 0,001. (15 баллов)